Probability & Statistics (1)

Conditional Probability and Independence (I)

Asst. Prof. Chan, Chun-Hsiang

Master program in Intelligent Computing and Big Data, Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan
Undergraduate program in Intelligent Computing and Big Data, Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan
Undergraduate program in Applied Artificial Intelligence, Chung Yuan Christian University, Taoyuan, Taiwan

Outlines

1. Introduction
2. Conditional Probabilities
3. Bayes' Formula
4. Independent Events
5. P(·|F) is a Probability
6. Applications of Conditional Probability
7. [#6] Assignment
8. Reference
9. Question Time

Introduction

我們之前介紹的機率都是以沒有假設條件下所得出來的結果，然而在真實世界中，有很多問題是需要考量到先決條件。

譬如說: 你要計算你面試上某外商工作的機率為多少? 你可能就先需要考慮到你的課業表現，再評估專題製作的成果。如果你想應徵上某外商，你則需要在課堂上拿到A+，再以專題成果參加學術競賽並獲得第一名；換句話說，你要計算你拿到A+機率時，獲得學術競賽獲得第一名的機率，也就是條件機率(conditional probability)的概念。

Conditional Probabilities

- **條件機率**(conditional probabilities)的定義: 在A事件確定會發生的前提下，B事件會發生的機率為何?

- 以數學的表示方法可以被定義為:

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$
$$where\ P(A) > 0$$

Conditional Probabilities

$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$

- **範例一**

我們機率與統計期中考的考試時間為1小時，假設學生可以在x小時內交卷的機率為$x/2$，且x的範圍界於0到1之間。試問經過45分鐘後仍在寫考卷的前提下，請問這些學生使用1小時的機率為何?

Solution:

令L_x為在x小時內交卷的事件，且$0 \le x \le 1$；則需要1小時才能交卷的事件為F。那麼$P(F) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0.5$。

所以這時候我們就是要求: $P(F|L_{0.75}^c) = \frac{P(FL_{0.75}^c)}{P(L_{0.75}^c)} = \frac{P(F)}{1-P(L_{0.75})} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例二**

一枚公平的硬幣投擲兩次，在以下不同前提之下，試求出兩次都是出現人頭的條件機率為何?

(a) 第一次出現人頭的前提

(b) 至少一次出現人頭的前提

Solution

令$B = \{(h,h)\}$；$F = \{(h,h),(h,t)\}$；$A = \{(h,h),(h,t),(t,h)\}$

(a) $P(B|F) = \frac{P(BF)}{P(F)} = \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{h,h),(h,t)\})} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2$

(b) $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例三**

又到了打牌的時間，假設52牌公平的分給四個人(A、B、C、D)，其中A與C兩人一共拿到8張紅心，B拿到剩下5張紅心中的3張的機率為何?

Solutions:

因為AC兩人已經拿了8張紅心，同時也代表他們拿到各13張牌。也就是說B就是從剩下26張牌裡面取13張出來，又希望可以從剩下5張紅心拿到3張的條件機率。

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} \approx 0.339$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例四**

今天周年慶舉辦抽獎活動，假設你今天購買了一堆東西可以抽n次獎，已知抽獎箱裡面有一獎x個以及二獎y獎，試問在n次抽獎機會中，抽中一獎k次的機率為何?

Solutions:

抽中一獎與二獎的機率分別為$P(F)$與$P(S)$；抽k次一獎的機率為$P(F_k)$。

$$P(F|F_k) = \frac{P(FF_k)}{P(F_k)} = \frac{P(F_k|F)P(F)}{P(F_k)}$$

$$\because P(F_k|F) = \frac{P(F_kF)}{P(F)} = \frac{P(FF_k)}{P(F)}, P(FF_k) = P(F_k|F)P(F)$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- 範例四

$$P(F|F_k) = \frac{P(FF_k)}{P(F_k)} = \frac{P(F_k|F)P(F)}{P(F_k)}$$

$$P(F) = \frac{x}{x+y}; P(F_k) = \frac{\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}}{\binom{x+y}{n}}; P(F_k|F) = \frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{y}{n-k}}{\binom{x+y-1}{n-1}}$$

$$P(F|F_k) = \frac{P(F_k|F)P(F)}{P(F_k)} = \frac{\frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{y}{n-k}}{\binom{x+y-1}{n-1}} \times \frac{x}{x+y}}{\frac{\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}}{\binom{x+y}{n}}} = \frac{k}{n}$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例五**

下學期你預計要選修機率與統計(二)或是線性代數(二)，但是你未來想要推甄研究所，於是乎你決定以獲得到A+成績的機率來做抉擇。你評估你在機率與統計(二)與線性代數(二)獲得到A+成績的機率，分別為1/3與1/2。可是你還是遲遲無法下定決心，決定投擲硬幣決定，請問你在機率與統計(二)獲得到A+成績的機率為何?

Solution:

題目的概念就在於說，不論你在哪一堂課獲得A+的前提下($P(AllA)$)，你在機統二獲得A+的機率($P(PSA)$)是多少。

$$P(PSA \cap AllA) = P(AllA)P(PSA|AllA)$$

$$P(PSA \cap AllA) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例六**

又到了百貨公司周年慶的時節，摸彩箱裡面有金球5顆、銅球3顆、白球8顆，假設每一顆球抽到的機率相同，(1) 請問連續兩顆抽到金球的機率為何? (2) 假設抽到每顆球的機率不相同，其金球、銅球、白球權重分別為g、c、w。抽到某種球的機率為該球的球數×權重，再除以所有剩下球的球數×相對應的權重，那麼連續兩顆抽到金球的機率為何?

Solution:

Conditional Probabilities

$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$

- **範例六**

1) 令$P(G_1)$與$P(G_2)$分別為抽中第一顆與第二顆金球的機率，連續抽中兩顆機率為:

$$P(G_1G_2) = P(G_1)P(G_2|G_1)$$

$$P(G_1G_2) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{20}{240} = \frac{1}{6}$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **範例六**

2) 因為總金球數為5顆，然而一輪中抽中金球(B_i)的機率都相同，那麼第一顆抽中機率為:

$$P(G_1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{5} B_i\right) = \sum_{i=1}^{5} P(B_i) = 5 \times \frac{g}{5g+3c+8w}$$

$$P(G_2|G_1) = \frac{4g}{4g+3c+8w}$$

$$\therefore P(G_1G_2) = \frac{5g}{5g+3c+8w} \times \frac{4g}{4g+3c+8w}$$

Conditional Probabilities

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **The Multiplication Rule**

$$P(E_1E_2E_3 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1})$$

Prove:

$$P(E_1E_2E_3 \cdots E_n) = P(E_1)\frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)}\frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} \cdots \frac{P(E_1E_2 \cdots E_n)}{P(E_1E_2 \cdots E_{n-1})}$$

Conditional Probabilities

$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$

- **範例七**

取一副52張完整的撲克牌發給四個人，每人13張，請問每個人都有拿到一張Ace的機率為何?

Solution:

我們可以將「每個人都有拿到一張Ace」拆解為四種事件的交集。

$E_1 = \{任何一個人有一張黑桃A\}$

$E_2 = \{黑桃A與紅心A在不同的人手上\}$

$E_3 = \{黑桃A、紅心A與方塊A在不同的人手上\}$

$E_4 = \{所有的A都在不同的人手上\}$

Conditional Probabilities

$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$

- **範例七**

$E_1 =$ {任何一個人有一張黑桃A}
$E_2 =$ {黑桃A與紅心A在不同的人手上}
$E_3 =$ {黑桃A、紅心A與方塊A在不同的人手上}
$E_4 =$ {所有的A都在不同的人手上}

$$P(E_1) = 1;\ P(E_2|E_1) = \frac{39}{51};\ P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50};\ \ P(E_4|E_1E_2E_3) = \frac{13}{49}$$

$$P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{39}{51} \times \frac{26}{50} \times \frac{13}{49}$$

Bayes' Formula

- Let E and F be events. We may express E as

$$E = EF \cup EF^c$$

- 如果還記得我們之前介紹的機率命題，EF與EF^c為互斥事件(mutually exclusive)，所以我們就可以將$P(E)$以下列方式表示:

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$
$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$
$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]$$

Bayes' Formula

- **範例八**

某保險公司根據過去的數據計算，將人群區分為兩類: 1年內會發生意外與1年內不會發生意外兩種，其機率分別為0.5與0.3。假設有40%的人會發生意外，請問新加保人在1年內發生意外機率為何?

Solutions

新加保人且會1年內發生意外的事件為$A1$；單純會發生意外的事件為A。

$$P(A1) = P(A1|A)P(A) + P(A1|A^c)P(A^c)$$

$$P(A1) = 0.5 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6 = 0.38$$

Bayes’ Formula

- 範例八

試問新加保人在一年內發生意外，那麼他們本身發生意外的機率?

Solution

$$P(A|A1) = \frac{P(AA1)}{P(A1)} = \frac{P(A)P(A1|A)}{P(A1)} = \frac{0.4 \times 0.5}{0.38}$$

Bayes' Formula

- **範例九**

還記得高中考學測跟指考嗎? 常常會面臨到選擇題的困境，要嘛你知道答案，不然你只能猜了! 我們令p為你知道答案的機率，$1-p$就是你用猜的機率；那你猜對的機率為$1/m$；m為選項的數目。試問學生答對的前提下，知道答案的機率為何?

Solution

令答對的事件為C；知道答案的事件為K。

$$P(K|C)=\frac{P(KC)}{P(C)}=\frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K)+P(C|K^c)P(K^c)}=\frac{p}{p+(1/m)(1-p)}$$

Bayes' Formula

- **範例十**

假設新冠肺炎快篩檢測有95%有效地偵測出來是否有確診，然而健康人也會有1%偽陽性的機率。如果0.5%的人口是有得病，請問若有一人被驗出陽性前提下，真的有得病的機率為何?

Solution

令事件A真的有得病的事件；事件B為驗出陽性的事件，則:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{0.95\times 0.005}{0.95\times 0.005+0.01\times 0.995}=\frac{95}{294}\approx 0.323$$

Bayes’ Formula

- **範例十**

重新反思所謂的**偽陽性**問題:

真的有得病人口比例只有0.5%，換句話說就是每200人只有1人得病。

那現在快篩偽陽性為1%，那我們就可以用數學表示，那些驗出陽性且真的有得病的人機率為:

$$\frac{1 \times 0.95}{1 \times 0.95 + 199 \times 0.01} = \frac{95}{294} \approx 0.323$$

Bayes' Formula

- **範例十一**

假設你為一個R2外科住院醫師，你有80%確定該病患有得疾病Z，所以他們需要做手術治療，因此你不太確定我需不需要讓病患再多做Y檢查，這些檢查可能會有副作用或是很不舒服且還價格高昂。現在你只有60%確定病患X有得疾病Z，所以你就讓病患X去做Y檢查，多次檢查結果顯示陽性(且在正常人的Y檢查中不會有偽陽偽陰性的問題)。但在手術前，病患X跟你說他有糖尿病，於是讓你很猶豫該如何做。因為在30%的Y檢查陽性糖尿病病患中，其實是沒有患有疾病Z。那請問你是否需要幫病患X開刀?

Bayes’ Formula

- **範例十一**

令事件D為病患X有得疾病Z；事件E為Y檢查為陽性。

$$P(D|E)=\frac{P(DE)}{P(E)}=\frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D)+P(E|D^c)P(D^c)}$$

$$=\frac{0.6\times 1}{0.6\times 1+0.3\times 0.4}=0.833$$

Bayes' Formula

- **範例十二**

甕A一開始有n顆紅色球；甕B一開始有n顆藍色球。從甕A隨機取出一顆，再從甕B隨機取一顆放進去(如果甕B還有球的話)，直到甕A完全沒有球為止(換句話說: 取完2n顆球)。試問:

(a) 求$P(R)$，事件R為從甕A取出來的最後一顆球為紅色。

(b) 同上題，不過甕A裡面有r_1顆紅球與b_1顆藍球；甕B裡面有r_2顆紅球與b_2顆藍球。

Bayes' Formula

- 範例十二

(a) Solution

假設事件F為最後一顆球紅色球的事件，在這過程中需要取完甕A中的紅球；在此同時，甕B中的藍球也會被取完。令N_i為不取出最後要被取出那顆紅球的事件:

$$P(F) = P(N_1 \cdots N_n F)$$

$$P(F) = P(N_1)P(N_2|N_1) \cdots P(N_n|N_1 N_2 \cdots N_{n-1})P(F|N_1 N_2 \cdots N_n)$$

$$P(F) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

Bayes' Formula

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

- **範例十二**

此時我們將所有紅球編上編號，使得事件R_j為最後第j顆被取出的紅球。

$$P(R_j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

因為事件R_j彼此之間為互斥事件，因此:

$$P(R) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} R_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(R_j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx e^{-1}$$

Bayes' Formula

- 範例十二

(b) Solution

從(a)小題中，我們可以將其解答更改甕中的球數，且我們假設最後一個被取出的紅球是原來出現在甕A的前題下，可以得到:

$$p = \left(1 - \frac{1}{r_1 + b_1}\right)^{r_2 + b_2} \frac{1}{r_1 + b_1}$$

$r_2 + b_2$是指今天甕B的球全部被取出的前題下，但最後一顆紅球是在甕A的情形。

Bayes' Formula

- **範例十二**

假設今天最後一顆球是從甕A取出來的，則:

$$P(A) = (r_1 + b_1)p = \left(1 - \frac{1}{r_1 + b_1}\right)^{r_2+b_2}$$

這時候我們就可以整併:

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|A^c)P(A^c)$$

$$P(R) = \frac{r_1}{r_1 + b_1}\left(1 - \frac{1}{r_1 + b_1}\right)^{r_2+b_2} + \frac{r_2}{r_2 + b_2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{r_1 + b_1}\right)^{r_2+b_2}\right)$$

Bayes’ Formula

- 範例十二

假設$r_1+b_1=r_2+b_2=n$，且當n極大的時候，其機率為:

$$P(L)\approx\frac{r_1}{r_1+b_1}e^{-1}+\frac{r_2}{r_2+b_2}(1-e^{-1})$$

Bayes' Formula

- **Definition of ODDS**

The odds (勝算) of an event A are defined by

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

這個說明了A事件發生的機率相對於不發生A事件的機率的比例。

$P(A) = \frac{2}{3}$, $\because P(A) = 2P(A^c)$; $\therefore odds\ are\ 2.$

If the odds are equal to α, then it is common to say that the odds are "α to 1" in favor of the hypothesis.

Bayes' Formula

- 如果今天有一個假設H為真，其機率為$P(H)$，現在有一個新的證據E出現，試問在出現這個證據之後，假設H為真與為假的機率為何?

$$P(H|E)=\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)};P(H^c|E)=\frac{P(E|H^c)P(H^c)}{P(E)}$$

- 因此，在證據E出現之後，新的勝算(odds)為:

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)}=\frac{P(H)}{P(H^c)}\frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}$$

Bayes’ Formula

- **範例十三**

假設今天摸彩箱裡面有兩種摸彩卷(5張A & 2張B)，A種的中獎機率為1/10；B種的中獎機率為1/20。試問今天你抽到一張摸彩卷都中獎前題下，且他是A種的機率為何?

Solution

$$odds = \frac{P(A|W)}{P(A^c|W)} = \frac{P(A)}{P(B)}\frac{P(W|A)}{P(W|B)} = \frac{5/7}{2/7}\frac{1/10}{1/20} = 5$$

因此，我們可以知道中獎前題下是A的機率為$\frac{5}{6}$

Bayes' Formula

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$
$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$
$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]$$

- 參考右上角的算式，假設$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$皆為互斥事件，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$$

- 換句話說，假設某一特定事件一定要發生，我們就可以寫成

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

- 又因為$EF_i, i = 1,2,3, \ldots, n$皆為互斥，所以:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)$$

Bayes’ Formula

- **範例十四**

現在有一個藏寶遊戲，寶物被藏在三個地區$(i=1,2,3)$。在這三個地區找到的機率分別為$1-\beta_i$；故β_i可以做為在第i地區寶物被忽略的機率。請問在第一區卻被忽略的前提下，寶物在第i地區的機率為何?

Solution

Bayes' Formula

- **範例十四**

令寶物出現在第i地區的事件為$R_i = 1,2,3$；E為在第一區沒有找到的事件。

$$P(R_1|E) = \frac{P(ER_1)}{P(E)} = \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|R_i)P(R_i)} = \frac{\beta_1 \times \frac{1}{3}}{\beta_1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + 2}$$

For $j = 2, 3$

$$P(R_j|E) = \frac{P(ER_j)}{P(E)} = \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\beta_1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\beta_1 + 2}, j = 2,3$$

Bayes' Formula

- **範例十五**

假設現在有三張卡片：第一張卡雙面為紅色；第二張卡雙面為黑色；第三張卡一邊為紅色一邊為黑色。隨機抽一張卡片，朝上的一面為紅色前提下，背面為黑色的機率為多少?

Solution

令RR, BB, RB分別代表這三張卡片。

$$P(RB|R) = \frac{P(RB \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RB)P(RB) + P(R|BB)P(BB)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Bayes' Formula

- **範例十六**

一對夫妻有兩個小孩搬進大溪。假設媽媽在路上遇到她其中一個小孩；如果這個小孩為女生的前提下，她兩個小孩都是女生的機率為多少?

Solution

假設第一個小孩為女生的事件為G_1；第二個小孩為女生的事件為G_2；媽媽看到的小孩為女生事件為G。第一個小孩為男生的事件為B_1；第二個小孩為男生的事件為B_2；媽媽看到的小孩為男生事件為B。

Bayes' Formula

- **範例十六**

所以我們需要求的解答為:

$$P(G_1G_2|G)=\frac{P(G_1G_2G)}{P(G)}=\frac{P(G_1G_2)}{P(G)}$$

$$P(G)=P(G|G_1G_2)P(G_1G_2)+P(G|G_1B_2)P(G_1B_2)+$$
$$P(G|G_2B_1)P(G_2B_1)+P(G|B_1B_2)P(B_1B_2)$$

$\because P(G|G_1G_2)=1; P(G|B_1B_2)=0$

$\therefore P(G_1G_2)+P(G|G_1B_2)P(G_1B_2)+P(G|G_2B_1)P(G_2B_1)$

$$P(G_1G_2|G)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+P(G|G_1B_2)\times\frac{1}{4}+P(G|G_2B_1)\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{1+P(G|G_1B_2)+P(G|G_2B_1)}$$

Bayes' Formula

$$P(G_1G_2|G) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + P(G|G_1B_2) \times \frac{1}{4} + P(G|G_2B_1) \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 + P(G|G_1B_2) + P(G|G_2B_1)}$$

(1) 如果不論是G_1B_2或是G_2B_1，媽媽都可以看到女孩。因此我們就可以假設這與小孩的性別無關，媽媽看到哥哥/姊姊的機率為p，

$$P(G|G_1B_2) = p = 1 - P(G|G_2B_1)$$

故$P(G_1G_2|G) = \frac{1}{2}$。

Bayes' Formula

$$P(G_1G_2|G) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + P(G|G_1B_2) \times \frac{1}{4} + P(G|G_2B_1) \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 + P(G|G_1B_2) + P(G|G_2B_1)}$$

(2) 假設小孩的性別不同，媽媽看到小孩的機率為q ，與小孩的長幼無關:

$$P(G|G_1B_2) = P(G|G_2B_1) = q$$

故$P(G_1G_2|G) = \frac{1}{1+2q}$。

所以當$q = 1$的時候，代表媽媽總是會看到女孩，其有兩個女孩的前提下，條件機率為$\frac{1}{3}$。

Bayes' Formula

- **範例十七**

如今有三種燈泡可以亮超過100小時的機率分別為0.7、0.4、0.3。假設三種燈泡的比例分別為20%、30%、50%。

(a) 隨機取一個燈泡可以亮超過100小時的機率為何?

(b) 在亮100小時之後，該燈泡為j種燈泡($j=1,2,3$)的條件機率為何?

Solution

(a)令A為亮100小時以上的事件，F_j為代表第j種燈泡被選上的事件。

$$P(A)=P(A|F_1)P(F_1)+P(A|F_2)P(F_2)+P(A|F_3)P(F_3)$$
$$=0.7\times 0.2+0.4\times 0.3+0.3\times 0.5=0.41$$

Bayes' Formula

- 範例十七

(b)

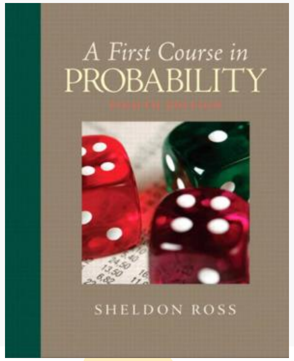
$$P(F_j|A) = \frac{P(F_jA)}{P(A)} = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{0.41}$$

$$when\ j = 1, P(F_1|A) = \frac{0.7 \times 0.2}{0.41} = \frac{14}{41}$$

$$when\ j = 2, P(F_2|A) = \frac{0.4 \times 0.3}{0.41} = \frac{12}{41}$$

$$when\ j = 3, P(F_3|A) = \frac{0.3 \times 0.5}{0.41} = \frac{15}{41}$$

[#6] Assignment



- Selected Problems from Sheldon Ross Textbook [1].

3.7. The king comes from a family of 2 children. What is the probability that the other child is his sister?

3.8. A couple has 2 children. What is the probability that both are girls if the older of the two is a girl?

3.15. An ectopic pregnancy is twice as likely to develop when the pregnant woman is a smoker as it is when she is a nonsmoker. If 32 percent of women of childbearing age are smokers, what percentage of women having ectopic pregnancies are smokers?

3.16. Ninety-eight percent of all babies survive delivery. However, 15 percent of all births involve Cesarean (C) sections, and when a C section is performed, the baby survives 96 percent of the time. If a randomly chosen pregnant woman does not have a C section, what is the probability that her baby survives?

3.17. In a certain community, 36 percent of the families own a dog and 22 percent of the families that own a dog also own a cat. In addition, 30 percent of the families own a cat. What is

(a) the probability that a randomly selected family owns both a dog and a cat?

(b) the conditional probability that a randomly selected family owns a dog given that it owns a cat?

3.18. A total of 46 percent of the voters in a certain city classify themselves as Independents, whereas 30 percent classify themselves as Liberals and 24 percent say that they are Conservatives. In a recent local election, 35 percent of the Independents, 62 percent of the Liberals, and 58 percent of the Conservatives voted. A voter is chosen at random. Given that this person voted in the local election, what is the probability that he or she is

(a) an Independent?

(b) a Liberal?

(c) a Conservative?

(d) What fraction of voters participated in the local election?

[1] Sheldon Ross. A First of Course in Probability. 8th edition.

Reference

Ross, S. (2010). *A first course in probability*. Pearson.

The End

If you have any questions, please do not hesitate to ask me.

Thank you for your attention))